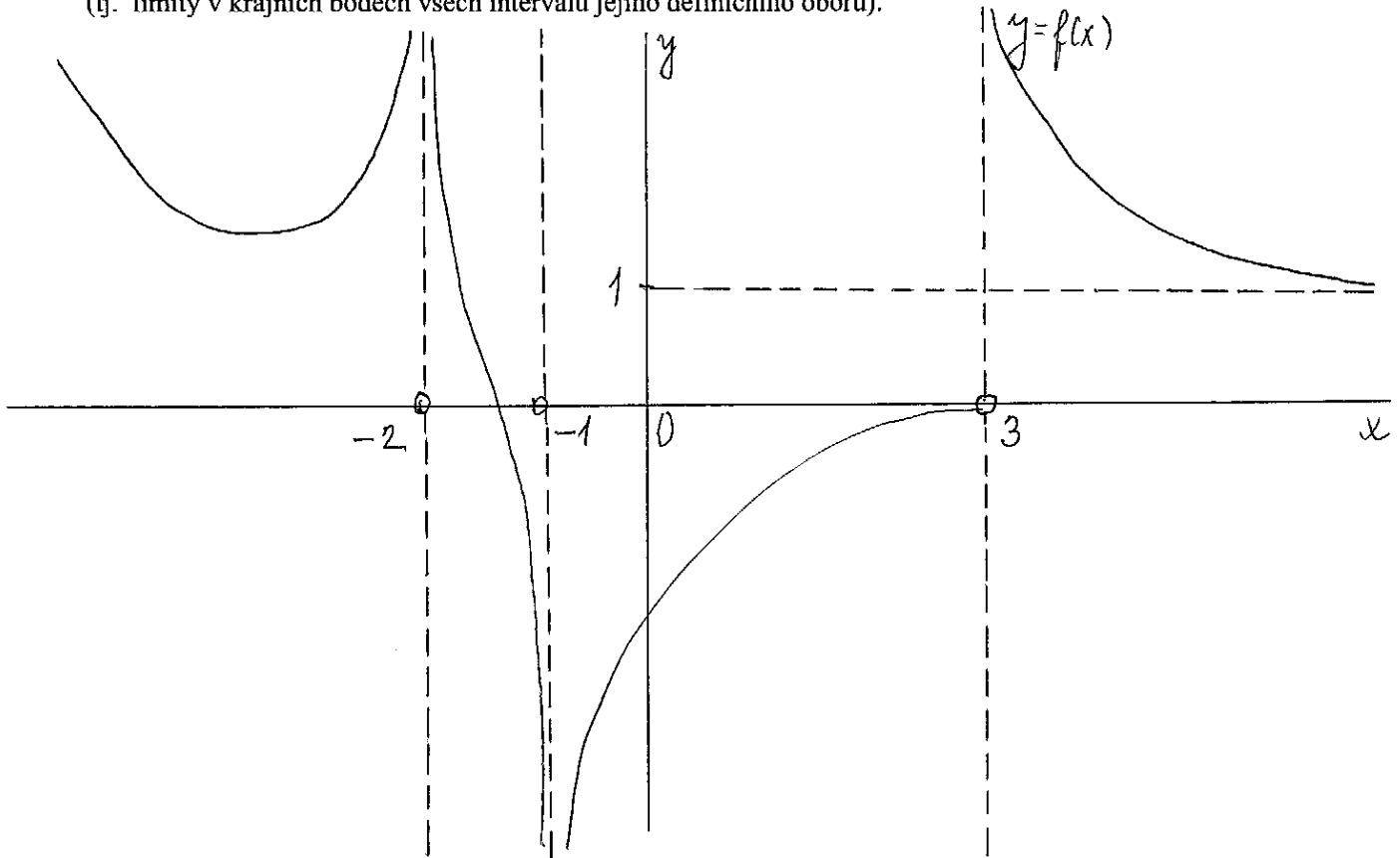


MA1 cvičení

Limita funkce – úvodní příklady i „pro domácí práci“.

1. Popište limity funkce, jejíž graf je „na obrázku“, v bodech, kde funkce není definována, a též v $+\infty$ a v $-\infty$ (tj. limity v krajních bodech všech intervalů jejího definičního oboru).



2. Zkuste načrtnout graf funkce $y = f(x)$, víte-li, že

$Df = \mathbb{R} - \{0; 2\}$, f je spojitá ve všech bodech z definičního oboru Df a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. Pomocí intuitivní znalosti limit základních funkcí „odhadněte“ limity daných funkcí v krajních bodech intervalů jejich definičních oborů: (zde $\exp(x) = e^x$):

$$f(x) = : \frac{1}{x^3}; \frac{1}{x^2+1}; \exp(-x); \exp\left(\frac{1}{x^2+1}\right); \exp\left(\frac{1}{x^2}\right); \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right); \ln\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

A třeba i zkuste odhadnout, kde jsou tyto funkce rostoucí, nebo klesající, a také jejich grafy.

4. A výběr jednodušších příkladů na výpočet limity funkce:

i) aritmetika limit:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} x e^{x^2 - 3};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x^2 - 3x + 1)}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\ln(x + 2)}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x - 1)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4 - x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{(4 - x)^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2}{(4 - x)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{4 - x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - x}{x};$$

ii) limita složené funkce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow ?} \exp\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2 - x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x});$$

iii) užití věty o limitě sevřené funkce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sin x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cdot (2 + \sin x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sin x - 2);$$

iv)* Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, spočítejte limity

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right).$$